



Глава 4 Дополнительный материал

— Введение —

Хотелось ли вам когда-нибудь, чтобы в кратких описаниях заданий было больше примеров, пояснений и обсуждений? Если да — вы попали по адресу! В этом файле собраны дополнительные материалы к некоторым заданиям из 4-й главы.

Для головоломок здесь приведены примеры с решениями и комментарии о том, как создавать такие задания самостоятельно. Программа Early Family Math основана на идее, что ранняя математика — это то, чем стоит заниматься всей семьей. Придумывать головоломки и решать их вместе с ребёнком — важная часть этого процесса. Как только вы освоите принцип каждой головоломки, скорее всего, вам будет несложно придумывать их самостоятельно.

Многие головоломки имеют разные уровни сложности. Начинайте с самых простых — пусть ребёнок почувствует уверенность и получит удовольствие. Это гораздо важнее, чем пытаться решить сложные задачи с первого раза. Когда появится интерес, можно постепенно усложнять задачи. Не все задания подойдут каждому — и это нормально. Не стоит настаивать на том, что не вызывает отклика.

В этом файле вы найдёте материалы по следующим темам:

- **Глава 4 — Суммы внутри фигур**
- **Глава 4 — Прыжки по островам: метод компенсации**
- **Глава 4 — Треугольники разностей и сумм**
- **Глава 4 — Прыжки по островам: счёт с пропуском**
- **Глава 4 — Исправь ошибку**
- **Глава 4 — Прыжки по островам: единицы и десятки**
- **Глава 4 — Одиночные головоломки с фигурами**
- **Глава 4 — Квадрат суммы**
- **Глава 4 — Пирамида сложения**
- **Глава 4 — Математические исследования**

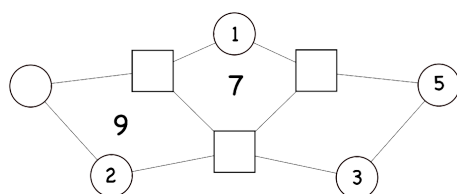
— Юридические вопросы —

Каждая семья должна иметь возможность вместе учиться и наслаждаться математикой. Именно поэтому, Early Family Math представляет собой сборник материалов, которые семьи и учителя могут свободно редактировать, переводить, копировать и распространять, не спрашивая разрешения. Только для некоммерческого использования.

Глава 4 — Суммы внутри фигур

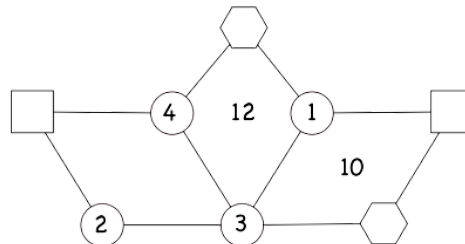
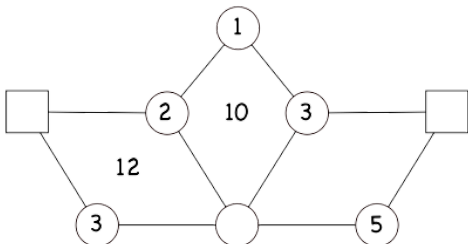
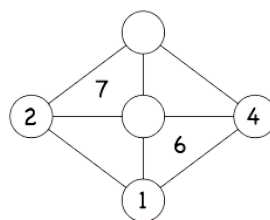
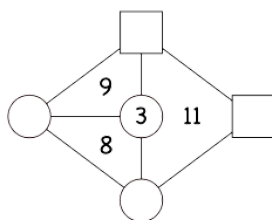
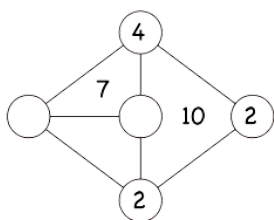
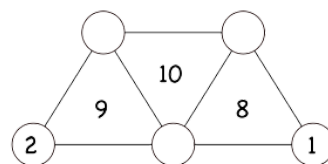
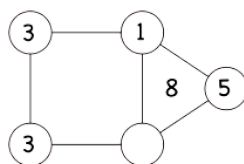
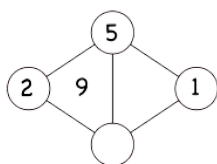
В этих головоломках фигуры соединены линиями. Каждая замкнутая область содержит число, которое является суммой значений фигур, окружающих её. Аналогично головоломкам с суммами фигур, круги могут иметь любое значение, а значение некруглых фигур должно быть одинаковым для одного и того же типа. Например: все квадраты имеют одинаковое значение, все шестиугольники — тоже. Дополнительно можно ввести правило, что разные некруглые фигуры должны иметь разные значения, например: квадраты и шестиугольники не равны между собой.

Задача ребёнка — определить значения тех фигур и областей, в которых числа не указаны.



Такую головоломку можно создать, составив схему из кругов и других фигур. Следует вписать в каждую фигуру число, а в каждую замкнутую область — сумму значений фигур, которые окружают её. После этого уберите некоторые из чисел.

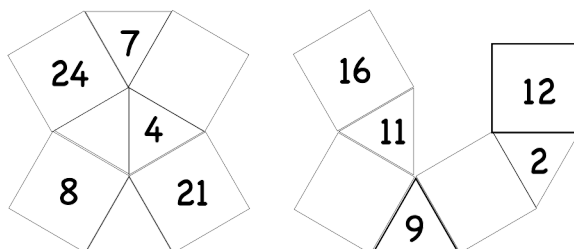
Как и в задачах «Суммы фигур» из главы 3, начните с простого: одна-две пропущенные цифры. Затем переходите к более сложным — с бóльшим количеством пропусков, областей и значений в фигурах других форм.



Глава 4 — Треугольники разностей и сумм

— Треугольники разностей —

Головоломка «Треугольники разностей» состоит из треугольников и квадратов, которые соединены сторонами. У каждого треугольника всегда есть ровно два квадрата по сторонам, а третья сторона — либо пустая, либо граничит с другим треугольником. Число внутри треугольника — разность значений двух соседних квадратов. Задача — восстановить недостающие числа.

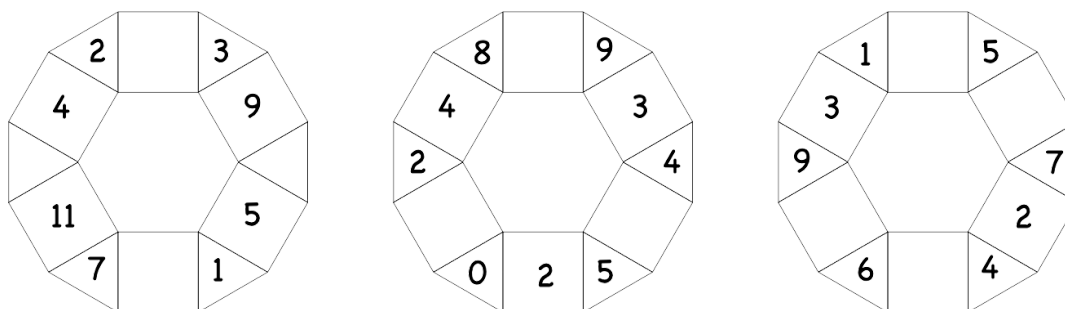


недостающие числа.

Как создавать головоломки: Создать головоломку, которая не замкнута в круг, довольно просто. Нарисуйте чередующуюся последовательность квадратов и треугольников, впишите числа, начиная с одного края, и двигайтесь к другому. Когда закончите, удалите некоторые из чисел. Создание заданий в виде замкнутого круга или более трудными связями — задача посложнее, но результат стоит усилий: такие головоломки получаются действительно увлекательными.

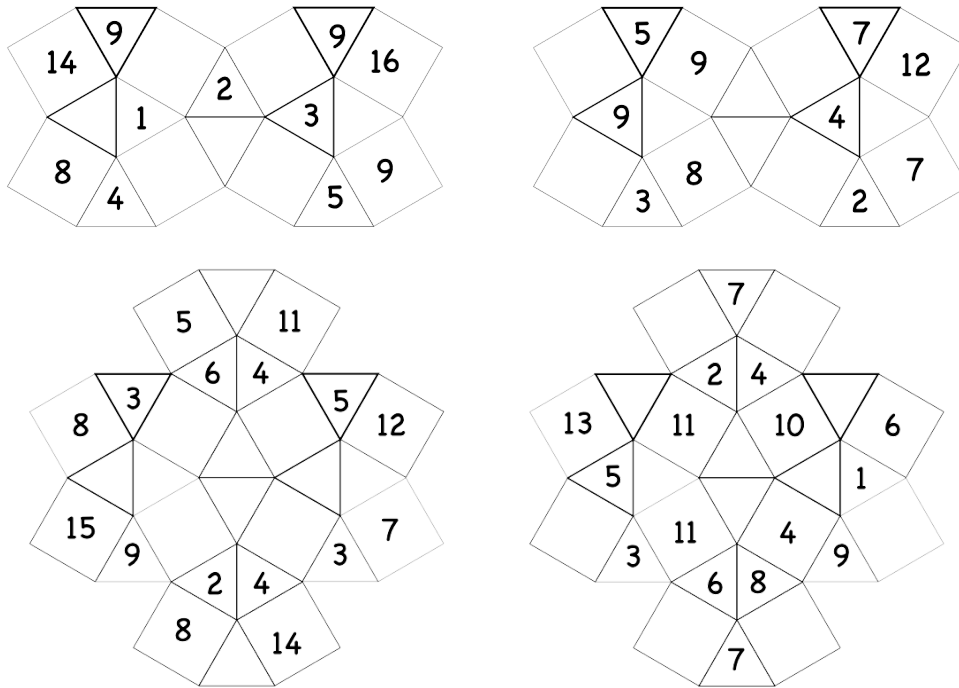
Когда ребёнок хорошо освоится с простыми головоломками, он, возможно, захочет попробовать придумать свои собственные. Это отличный способ получить удовольствие и многому научиться, разбираясь, как между собой связаны числа.

Стратегии решения: Начинать лучше с треугольников, расположенных между двумя заполненными квадратами. Другой простой случай — квадрат, который находится рядом с заполненным треугольником, а с другой стороны — с меньшим по значению заполненным квадратом. В этом случае, так как мы не используем отрицательные числа, существует только один возможный вариант для пустого квадрата. Наиболее распространённая ситуация — квадрат, у которого есть два возможных значения с одной стороны и два других — с



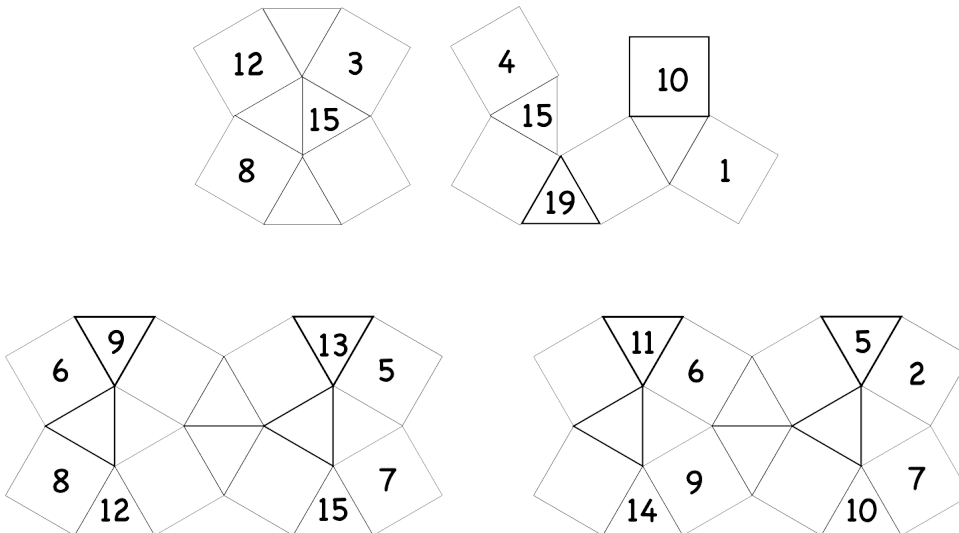
противоположной. Обычно только одно число совпадает в обеих группах, и оно и будет правильным ответом.

Вот несколько примеров с множеством взаимосвязей:



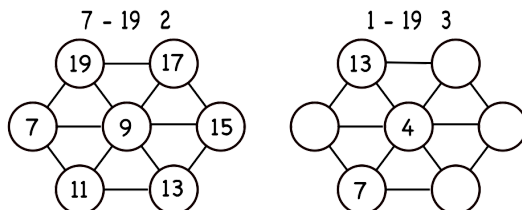
— Треугольники сумм —

Головоломки «Треугольники сумм» устроены так же, как и «Треугольники разностей», только вместо вычитания используется сложение. Значение треугольника — это сумма чисел в двух или трёх соседних квадратах. Создавайте такие головоломки по аналогии с «Треугольниками разностей». Обычно «Треугольники сумм» решать проще.



Глава 4 — Прыжки по островам: счёт с пропуском

Эти головоломки состоят из островов (кругов), соединённых мостами (линиями). В этой версии «Прыжков по островам» переходы выполняются с помощью счёта с пропуском (например, по 2, 5, 10 и т.д.). Некоторые острова имеют уже вписанные числа, а другие вначале будут пустыми. Над головоломкой указаны начальное число, конечное число и шаг счёта.



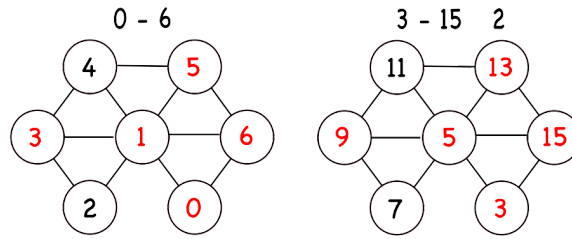
Задача — вписать недостающие числа и найти правильный путь. Также можно сделать головоломку в виде игры: выложите числа и пустые места на отдельных листках бумаги на полу, чтобы получилась «тропа» из шагов.

Как и в задании на счёт с пропуском, создавайте головоломки для тренировки счёта вперёд и назад, начиная с разных чисел, а не только с тех, которые являются кратными шагу счёта.

Создание таких головоломок похоже на создание заданий «Прыжки по островам — счёт» из начала главы 2. Сначала нарисуйте острова, впишите числа с учётом шага счёта, соедините эти острова в правильном порядке, а затем добавьте дополнительные переходы, чтобы получилась полноценная головоломка. В версии для ребёнка уберите некоторые числа, но оставьте столько, чтобы решение всё ещё можно было найти.

Вы можете снова обратиться к стратегиям создания головоломок, описанным в бонусных материалах ко 2-й главе для задания «Прыжки по островам — счёт». Если у вас сохранились те головоломки, их очень легко переделать под новый формат. Возьмём, например, задание из главы 2, где нужно считать от 0 до 6. Красные числа — это те, которые обычно пропускаются, когда головоломка даётся ребёнку. Чтобы превратить это задание в счёт с шагом 2, начиная с 3, просто умножьте все числа на 2 и прибавьте к ним 3, как показано в таблице ниже. После этого замените старые числа на новые (не забыв пропустить красные, конечно).

	0	1	2	3	4	5	6
умножить на 2	0	2	4	6	8	10	12
прибавить 3	3	5	7	9	11	13	15



Глава 4 — Исправь ошибку

Начните с сетки 4 на 4, заполненной числами, и задайте целевую сумму. Задача — удалить некоторые числа так, чтобы сумма оставшихся чисел в каждой строке и каждом столбце равнялась этой целевой сумме. В альтернативной версии для каждой строки и каждого столбца можно задать отдельную целевую сумму.

Подберите пары или тройки чисел, которые в сумме дают целевое значение. Затем заполните оставшиеся клетки числами-приманками. Можно сделать задание сложнее, добавив альтернативные пары или тройки чисел, которые подходят частично. Если ребёнку такие задания нравятся, но кажутся слишком легкими, можно увеличить размер сетки — например, до размера 4 на 5, 5 на 5 или даже больше.

Красные звездочки показывают, какие числа нужно удалить, чтобы сделать головоломку.

8																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="text-align: center;">6*</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">2*</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">4*</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3*</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">4*</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">5*</td></tr> </table>	6*	3	5	2*	2	1	4*	5	3*	4	1	3	6	4*	2	5*
6*	3	5	2*													
2	1	4*	5													
3*	4	1	3													
6	4*	2	5*													

9																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">4*</td><td style="text-align: center;">5*</td><td style="text-align: center;">2</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">4*</td><td style="text-align: center;">6</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3*</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">6*</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">3*</td></tr> </table>	7	4*	5*	2	2	1	4*	6	3*	4	4	1	6*	4	5	3*
7	4*	5*	2													
2	1	4*	6													
3*	4	4	1													
6*	4	5	3*													

10																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">6*</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">6*</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">4*</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">1*</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">6*</td><td style="text-align: center;">4*</td><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">2</td></tr> </table>	3	3	6*	4	7	1	2	6*	4*	6	1*	4	6*	4*	8	2
3	3	6*	4													
7	1	2	6*													
4*	6	1*	4													
6*	4*	8	2													

11																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">5*</td><td style="text-align: center;">4*</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1*</td><td style="text-align: center;">1*</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">7</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">1*</td><td style="text-align: center;">3*</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">7*</td><td style="text-align: center;">5*</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> </table>	8	3	5*	4*	1*	1*	4	7	3	8	1*	3*	7*	5*	7	4
8	3	5*	4*													
1*	1*	4	7													
3	8	1*	3*													
7*	5*	7	4													

Здесь два задания с отдельными целевыми суммами для строк и столбцов.

6	3	7	8*	16
2*	1*	4	5	9
3*	4*	7	3	10
5	6	3*	5*	11
11	9	18	8	

0	6	5*	2	8
7	8*	5	4*	12
2	7	1*	4*	9
3*	1*	9	8	17
9	13	14	12	

Глава 4 — Прыжки по островам: единицы и десятки

Дана прямоугольная сетка с числами, часть из которых уже вписана. Задача — заполнить оставшиеся клетки так, чтобы любые два числа, имеющие общую сторону, отличались только в одной позиции, и разница между цифрами в этой позиции была равна 1 (в том числе между 0 и 9). Одно и то же число нельзя использовать в сетке больше одного раза. Для начинающих может быть полезна таблица чисел до 100.

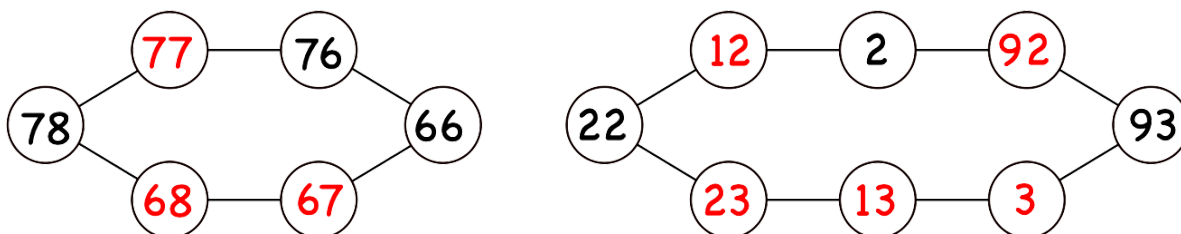
Создайте такую головоломку, заполнив пустую сетку числами без повторений. Затем уберите некоторые из них, проследив за тем, чтобы задание не стало слишком сложным для ребёнка. В этих примерах красным выделены пропущенные числа.

57	67	66	56
5	4	94	95

33	23	13
32	22	12

При использовании только однозначных и двузначных чисел не получится добавить много сложных элементов. Однако такие задания отлично помогают ребёнку потренироваться в понимании разрядов числа. Некоторые переходы могут удивить — например, от 95 к 5 и к 15, или от 11 к 10, затем к 0 и 9. Ребёнок может не сразу понять, что в однозначных числах в разряде десятков стоит 0, и может удивиться, что 0 и 9 считаются соседними.

Сетки — это самый привычный способ представления таких заданий. Однако их можно оформить так же, как и другие головоломки из серии «Прыжки по островам», с использованием кругов. Такой формат даёт больше свободы при создании головоломок.



Глава 4 — Одиночные головоломки с фигурами

— Волшебные треугольники —

Постройте треугольник из шести кругов так, чтобы на каждой стороне было по три круга. Заполните круги числами от 1 до 6 — каждое число можно использовать только один раз. Задача — расположить их так, чтобы сумма чисел на каждой стороне треугольника была одинаковой. Здесь сразу две трудности: сначала нужно понять, какие суммы действительно возможны, а затем попробовать их получить. Лучше всего, если ребёнок будет сам экспериментировать и искать подходящие суммы — в этом и есть смысл задания. Но если станет слишком трудно, можно подсказать: возможные суммы — 9, 10, 11 и 12.

Если ребёнку понравится это задание, можно попробовать построить больший треугольник — из девяти кругов, по четыре круга на каждой стороне. В этом случае возможные суммы — 17, 19, 20, 21 и 23.

Как и во многих других заданиях для этой возрастной группы, главная цель головоломки — чтобы ребёнок с интересом исследовал, как числа взаимодействуют друг с другом, и попрактиковался в работе с ними. В этом возрасте у детей ещё нет математических или логических навыков, чтобы систематически подходить к поиску решений. Однако эти головоломки можно изучать глубже, и вот несколько идей для тех, кто постарше и хочет разобраться подробнее.

Обозначим SUM как сумму чисел на одной стороне треугольника. Если сложить все три стороны, получится $3 \times SUM$. Однако эта сумма будет включать не только все числа, использованные в головоломке, но и по одному дополнительному значению для каждого угла треугольника, поскольку угловые числа относятся сразу к двум сторонам. Обозначим сумму значений в трёх углах как $C-SUM$. В итоге получаем соотношение: $3 \times SUM = \text{сумма всех чисел} + C-SUM$.

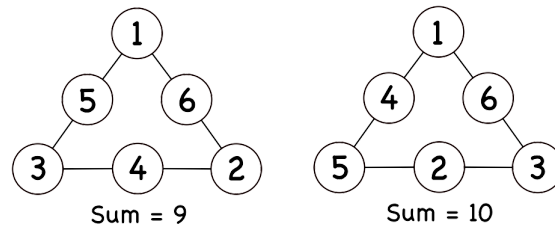
Задача с шестью кругами. Применим эту формулу к треугольнику с шестью кругами. Сумма всех чисел — это сумма чисел от одного до шести, то есть 21. Тогда уравнение принимает вид: $3 \times SUM = 21 + C-SUM$. Минимальное значение $C-SUM$ — это сумма трёх наименьших чисел в углах: $1 + 2 + 3 = 6$, а максимальное — сумма трёх наибольших: $4 + 5 + 6 = 15$. Значит, $3 \times SUM$ находится в диапазоне от $21 + 6 = 27$ до $21 + 15 = 36$. Отсюда следует, что SUM может быть равна 9, 10, 11 или 12. Также стоит заметить, что $C-SUM = 3 \times SUM - 21$, что удобно для определения чисел в углах.

Ещё один важный момент — симметрия возможных значений. Эта симметрия возникает потому, что для каждого решения существует «обратное» решение, которое получается вычитанием всех чисел из 7 (для задачи с шестью кругами) или из 10 (для задачи с девятью кругами). Небольшие вычисления показывают, что такая симметрия преобразует задачу с суммой SUM в новую задачу с суммой $(21 - SUM)$ (для шести кругов) или $(40 - SUM)$ (для девяти кругов).

И последнее, что стоит отметить перед тем, как перейти к конкретным числам: для любого решения значений в трёх углах можно считать, что они расположены по возрастанию по часовой стрелке, при этом на вершине находится самое маленькое число. Если изначально порядок другой, то можно просто повернуть или отразить диаграмму, чтобы привести её к такому виду.

Все эти наблюдения значительно сокращают объём работы. Нам нужно рассматривать только случаи, когда SUM равна 9 или 10, и при этом угловые значения должны быть расположены по возрастанию. Если $SUM = 9$, тогда $C-SUM = 3 \times 9 - 21 = 6$, значит углы — это числа 1, 2 и 3. Если $SUM = 10$, тогда сумма углов $a + b + c = 3 \times 10 - 21 = 9$, что оставляет два варианта: либо углы равны 1, 2 и 6, либо 1, 3 и 5. Быстрая проверка показывает, что вариант 1, 2 и 6 невозможен.

После долгой работы мы получили решения для случаев, когда SUM равна 9 и 10 в задаче с шестью кругами. Не забывай, что решения для SUM равных 11 и 12 можно получить, вычтя все числа из 7 — так работает описанная ранее симметрия.



Задача с девятью кругами. Используем тот же подход для задачи с девятью кругами. Сумма чисел от 1 до 9 равна 45. Следовательно, $3 \times SUM = 45 + C-SUM$. Минимальное значение $C-SUM$ — $1 + 2 + 3 = 6$, а максимальное — $7 + 8 + 9 = 24$. Значит, $3 \times SUM$ лежит в диапазоне от $45 + 6 = 51$ до $45 + 24 = 69$, что заставляет SUM принимать значения от 17 до 23. Если взять любое решение и вычесть все числа из 10, то получатся пары SUM : 17 — 23, 18 — 22, 19 — 21 и 20 — 20. Таким образом, нужно рассмотреть только случаи SUM равные 17, 18, 19 и 20. Соответствующие значения $C-SUM$ для них — 6, 9, 12 и 15.

При $SUM = 17$ и $C-SUM = 6$ углы должны быть 1, 2 и 3 — и это действительно так.

При $SUM = 18$ и $C-SUM = 9$ углы должны быть либо 1, 2 и 6, либо 1, 3 и 5. Однако ни один из этих вариантов не подходит.

При $SUM = 19$ и $C-SUM = 12$ существует несколько вариантов для углов, но единственными подходящими комбинациями являются 1, 4, 7 и 2, 3, 7.

При $SUM = 20$ и $C-SUM = 15$ существует множество вариантов для углов, и многие из них подходят. Среди работающих комбинаций — 1, 5, 9 и 2, 5, 8.

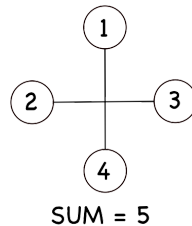
— Магические конструкции —

Аналогично магическим треугольникам, здесь круги соединены в определённый геометрический узор и дан набор чисел. Нужно расставить числа по кругам так, чтобы сумма чисел на каждой прямой линии, проходящей через соединённые круги, была одинаковой.

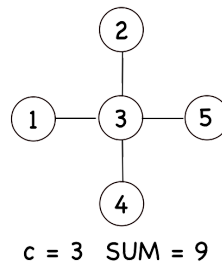
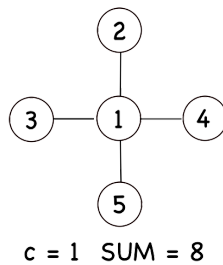
Анализ таких головоломок похож на разбор магических треугольников. Обозначим через SUM — общую сумму, которую должна давать каждая линия. Если в задаче есть центральный круг, обозначим его значение как c . Основная стратегия — сложить все строки (линии) и изучить, какие соотношения при этом получаются. Также стоит помнить: как и в случае с магическими

треугольниками, новое решение можно получить, вычитая все значения из числа, на единицу большего, чем наибольшее число в наборе.

1. Числа от 1 до 4 расположены в форме знака плюс, при этом линии не пересекаются — у них нет общих кругов. Сумма чисел от 1 до 4 равна 10, и она поровну делится между двумя направлениями. Значит, $SUM = 5$, задача решается легко.

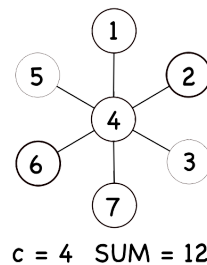
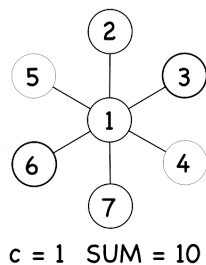


2. Числа от 1 до 5 расположены в виде знака плюс, при этом в центре находится общий круг. Сумма всех чисел от 1 до 5 равна 15. Складывая значения по вертикали и горизонтали, получаем уравнение: $2 \times SUM = 15 + c$, где c — значение центрального круга. Чтобы это выражение дало целое значение для SUM , сумма $15 + c$ должна быть четной, поэтому возможные значения для c — 1, 3 и 5. Решение для случая $c = 5$ (тогда $SUM = 10$) можно получить из варианта с $c = 1$, если

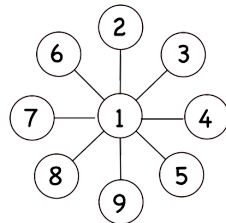


вычесть каждое число из 6.

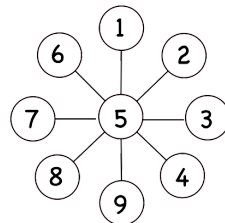
3. Числа от 1 до 7 расположены в виде трех линий по три круга, пересекающихся в одной общей точке — центральном круге. Складывая значения по всем трем направлениям, получаем уравнение: $3 \times SUM = 28 + 2 \times c$, где c — значение центрального круга. Поскольку левая часть делится на 3, выражение $28 + 2 \times c$ тоже должно делиться на 3 без остатка, что ограничивает возможные значения c — это 1, 4 или 7. Решения для случаев $c = 1$ и $c = 4$ даны.



4. Числа от 1 до 9 размещены по линиям из трех кругов, которые пересекаются в одном общем центральном круге. Суммируя значения по всем четырём направлениям, получаем уравнение: $4 \times \text{SUM} = 45 + 3 \times c$, где c — значение в центральном круге. Поскольку 4 должно делить выражение $45 + 3 \times c$ нацело, это возможно только при значениях $c = 1, 5$ или 9 .



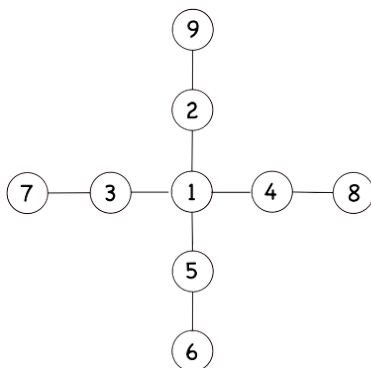
$c = 1 \quad \text{SUM} = 12$



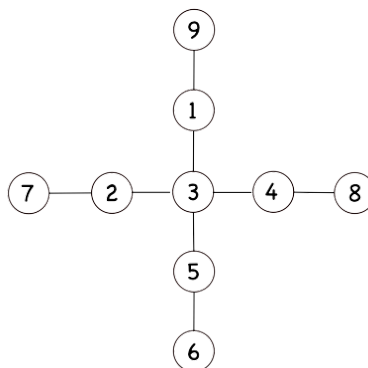
$c = 5 \quad \text{SUM} = 15$

5. Числа от 1 до 5 размещены в форме буквы «Г» с одним общим кругом в углу. Это по сути та же задача, что и под номером 2, поэтому и решения у них практически одинаковые.

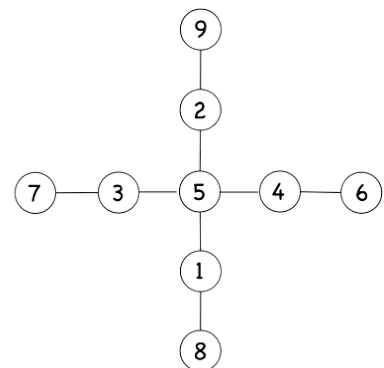
6. Числа от 1 до 8 размещены в форме плюса, без общих кругов. Два направления делят сумму 36 (сумму всех чисел) поровну, значит $\text{SUM} = 18$. Существует множество способов решить эту задачу, разбив числа на две группы с суммой 18. Один из вариантов — группы 1, 2, 7, 8 и 3, 4, 5, 6; другой — 1, 3, 6, 8 и 2, 4, 5, 7.



$c = 1 \quad \text{SUM} = 23$



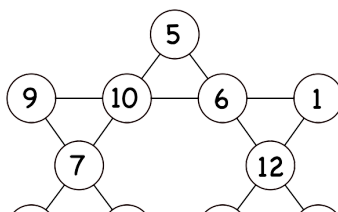
$c = 3 \quad \text{SUM} = 24$



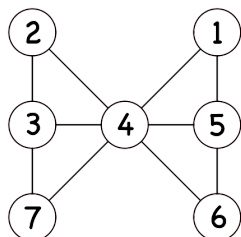
$c = 5 \quad \text{SUM} = 25$

7. Числа от 1 до 9 размещены в виде плюса с одним общим кругом посередине. Складывая значения по двум направлениям, получаем: $2 \times \text{SUM} = 45 + c$, где c — число в центральном круге. Это возможно только при значениях $c = 1, 3, 5, 7$ или 9 . Решения для $c = 1, 3$ и 5 приведены.

8. Числа от 1 до 12 размещены в форме звезды. Здесь шесть направлений — по линиям из четырёх кругов. Эта задача значительно сложнее предыдущих. Если сложить значения по всем направлениям, каждое число окажется учтенным дважды. Сумма чисел от 1 до 12 равна 78. Следовательно, $6 \times \text{SUM} = 2 \times 78$, откуда $\text{SUM} = 26$ (как указано в подсказке). Один из вариантов решения приведен ниже. Как и раньше, можно получить другое решение, вычитая все числа из 13.



9. Числа от 1 до 7 размещены в форме буквы Н: по три круга вертикально слева и справа, один — в центре. Всего получается 5 возможных линий, каждая из трёх связанных кругов. Если сложить значения по всем пяти направлениям, то каждое число будет использовано дважды, кроме центрального — оно используется трижды. Тогда уравнение принимает вид: $5 \times \text{SUM} = 2 \times 28 + c$. Поскольку 5 должно делить выражение $56 + c$ нацело, это возможно только при $c = 4$, и в этом случае $\text{SUM} = 12$ (что и указано в подсказке). Обратите внимание: числа 2 и 3 не могут находиться на той же стороне, что и 1, — это приводит к следующему решению.



Глава 4 — Квадрат суммы

Начните с таблицы 3 на 3, в которой заданы целевые суммы для каждой строки и каждого столбца. Некоторые числа от 1 до 9 уже размещены в клетках. Задача — правильно разместить оставшиеся числа так, чтобы суммы в строках и столбцах соответствовали заданным значениям.

Чтобы создать такую головоломку, начните с размещения карточек с числами от 1 до 9 на сетке 3 на 3. Для каждой строки и каждого столбца запишите сумму справа от строки или под столбцом. Затем уберите несколько чисел с сетки и отдайте удалённые карточки ребёнку, спрашивая: «Где они были?» Поскольку такие головоломки легко составлять, это отличное задание, которое ребёнок может придумать для вас, чтобы его решили вы.

Один из вариантов, при котором суммы получаются немного меньше, — использовать числа от 0 до 8. Более сложный вариант — сделать то же самое, но с числами от 1 до 12 на сетке 3 на 4 или даже от 1 до 16 на сетке 4 на 4.

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

Составить первоначальную, полностью заполненную головоломку довольно просто. Как упоминалось выше, просто разместите все числа и запишите суммы. Настоящая задача для создателя головоломки — убрать как раз столько информации, чтобы задание получилось интересным, но не слишком сложным.

Стратегии для решения и составления: начните с заполнения клеток, в которых не хватает всего одного числа в строке или столбце. Левая из трёх, данных выше головоломок решается довольно легко, потому что, как только вы подставите 5 и 7, станет просто найти 3 и 2, а затем легко подставить 8. Решая такие «одиночные» клетки, вы создаете новые, которые тоже будет легко посчитать.

Лёгкие головоломки на вычисления — отличная практика для вашего ребёнка, так что не переживайте, если некоторые задания будут несложными.

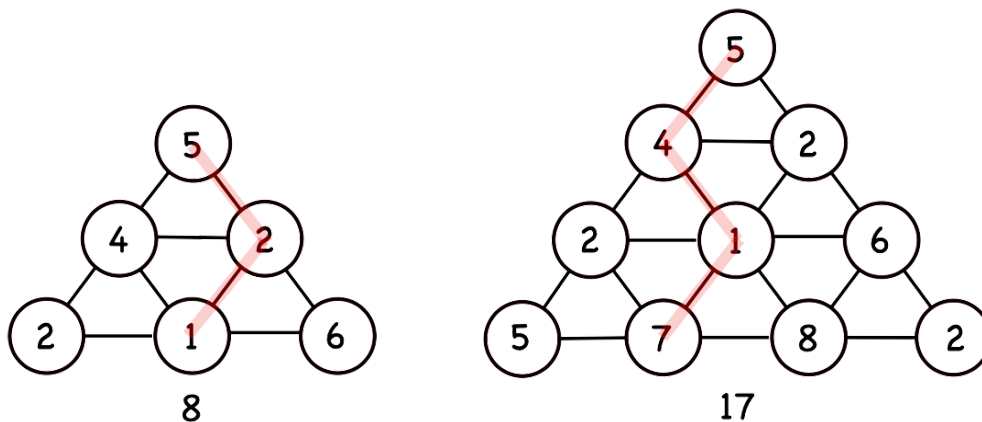
Средняя головоломка сложнее — нет клеток с одним пропущенным числом. Начинать стоит со строк или столбцов с особенно большими или маленькими недостающими суммами: вариантов там меньше. Здесь лучше начать с нижней строки и правого столбца. Пропущенные числа внизу дают 16, значит, это 7 и 9. Цифра 9 не может быть в столбце с 6 — сумма будет слишком большой, значит, можно точно определить, где 7, а где 9. Дальше всё решается так же, как в предыдущем примере.

В правой головоломке с краю отсутствуют два числа. Как только ребёнок поймёт, что суммы по краям должны в итоге давать 45 — а это сумма всех чисел от 1 до 9 — будет легко найти одно недостающее число сбоку.

Глава 4 — Пирамида сложения

Дана пирамида из 10 чисел, расположенных в 4 ряда, и задано целевое число. Задача — найти путь пирамиды, выбирая по одному числу из каждого ряда так, чтобы их сумма равнялась целевому числу. Числа на пути должны соединяться — каждое следующее число должно находиться прямо под предыдущим или по диагонали.

Составьте такую головоломку, сначала выбрав числа, из которых будет складываться правильный путь, и запишите их сумму как целевое число. Затем добавьте в пирамиду остальные — отвлекающие — числа. Количество возможных путей удваивается с добавлением каждого нового ряда, поэтому более крупные пирамиды подойдут для детей, которым головоломки из 10 чисел кажутся слишком легкими. А если ребёнку трудно дается головоломка из 10 чисел, начните с более простой — из 6, пока такие задачи не станут легкими и быстрыми.



В больших головоломках составителю может быть сложно гарантировать, что существует только один правильный путь через пирамиду. Не стоит слишком переживать из-за этого. Хотя это и весело, когда путь только один, тем не менее ваш ребёнок будет заинтересован в том, чтобы показать вам, что задачу можно решить разными способами.

Глава 4 — Математические исследования

— ЛЕПЕСТКИ ЦВЕТОВ —

ИССЛЕДОВАНИЕ

В волшебном саду растут два вида цветов. У одних — по 4 лепестка, у других — по 7. Ребёнку предложили сорвать такие цветы, чтобы в сумме получилось 13 лепестков. Возможно ли это? А если нужно 15 лепестков? Для какого числа лепестков это вообще возможно?

Если число возможно, то можно ли получить его разными способами? Например, 32 лепестка — это четыре цветка по 7 и один по 4, а ещё — восемь цветов по 4 лепестка.

Если попробовать разные пары чисел, можно найти множество интересных примеров. Для некоторых пар чисел наступает момент, после которого возможны абсолютно все количества лепестков. А у других — такого момента нет. Например, для 4 и 7 возможны все числа, начиная с 18. А для 3 и 6 нет такого числа, после которого возможны все суммы.

В чём здесь закономерность и что её создаёт? Эти вопросы возникают очень часто — и именно с них начинаются самые интересные открытия.

Проще всего понять, что происходит, когда одно и то же число делит оба числа нацело. Возьмём, например, 3 и 6. Их можно представить как 1×3 и 2×3 . Как бы вы их ни складывали, вы всегда будете получать число, кратное 3. Поэтому, например, невозможно сложить 3 и 6 так, чтобы получилось 10 — ведь 10 не делится на 3.

Когда единственный общий делитель двух чисел — 1, наступает момент, после которого возможны все суммы. Для 4 и 7 это число — 18. Чтобы его найти, нужно из каждого числа вычесть 1 и перемножить полученные результаты. В этом случае: $3 \times 6 = 18$.

Есть ещё одна интересная особенность: ровно половина чисел меньше 18 тоже будет достижима. Почему это работает — вопрос уже более сложной математики, не совсем подходящий для маленьких детей. Но играть с такими вычислениями интересно, и однажды у ребёнка всё может внезапно «щелкнуть» — и закономерность станет понятной.

— Подъём по ступенькам — Сколькими способами? —

ИССЛЕДОВАНИЕ

Представьте, что ваш ребёнок поднимается по ступенькам: иногда — на одну, а иногда — сразу на две. Возникает естественный вопрос: сколькими разными способами можно подняться на определённое количество ступеней?

Например:

- На 0 ступенек есть только один способ — просто стоять на месте.
- На 1 ступеньку тоже один способ — сделать один шаг.
- На 2 ступеньки уже два варианта: либо два одиночных шага, либо один двойной.

Пусть ребёнок внимательно посчитает количество способов для разных случаев и составит таблицу с результатами. Когда данных становится много, таблица помогает упорядочить варианты решений и легче заметить закономерности. Она может выглядеть так (однако после 6 ступенек, возможно, вам потребуется немного больше терпения, но вот первые числа):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Посмотрев на эти числа ребёнок может заметить, что каждое следующее число получается как сумма двух предыдущих. Почему так происходит? Эти числа называются **числами Фибоначчи**. Правило для их построения простое: каждое число — это сумма двух предыдущих. То же самое случается и с количеством способов подняться по ступенькам. Хмм...

Рассмотрим один пример внимательнее — допустим, 5 ступенек. Всего есть 8 способов подняться:

1+1+1+1+1,
1+1+2+1,
1+2+1+1,
2+1+1+1,
2+2+1,
1+1+1+2,
1+2+2,
2+1+2.

Первые 5 вариантов заканчиваются шагом на 1 ступеньку, а последние 3 — шагом на 2. И вот в чём дело: чтобы подняться на 5 ступенек, вы можете сначала подняться на 4 и сделать ещё один шаг, или подняться на 3 и сделать двойной шаг.

То есть количество способов подняться на 5 ступенек — это сумма способов подняться на 4 и на 3.

Закономерности часто становятся понятны, если терпеливо разбирать примеры, упорядочивать данные, внимательно на них смотреть и искать объяснение тому, почему всё происходит именно так. Это очень полезная привычка, которую стоит развивать у ребёнка.

— Весы-уравновешиватели — ИССЛЕДОВАНИЕ

Весы — это простой прибор, который показывает, когда два предмета весят одинаково. Обычно к весам прилагается набор гирь, которыми можно измерять вес других предметов. Интересно провести разные эксперименты, если ограничить набор гирь, которые можно использовать.

Один вид гирь: допустим, у вас много гирь, но все они одинакового веса — например, по 5 единиц. Тогда точно взвесить можно только те предметы, вес которых кратен 5 (то есть, это то же самое, что и счёт по 5).

Два вида гирь — на одной стороне: допустим, у вас много гирь по 4 и по 7 единиц, и вы кладете их только на одну сторону весов. Тогда взвесить можно те же числа, что и в задаче с лепестками цветов. Для гирь 4 и 7, начиная с 18 единиц, можно точно взвесить любые значения. Если же гири 4 и 6 единиц, то можно взвешивать только чётные числа, начиная с 4.

Два вида гирь — с обеих сторон: после того, как ребёнок попробует взвешивать предметы с двумя видами гирь, положенными только на одну сторону, его может удивить, если вы предложите взвесить предмет весом 3 или даже 1 единицу с гирями 4 и 7. Секрет в том, что гири можно класть с обеих сторон весов. Например, чтобы проверить, что предмет весит 3 единицы, положите его вместе с гирей в 4 единицы на одну сторону, а на другую — гирю в 7 единиц. Весы уравновесятся. Чтобы проверить, что предмет весит 1 единицу, положите его с гирей в 7 единиц на одну сторону, а на другую сторону — две гири по 4 единицы.

В этом исследовании скрыта важная математическая теорема — теорема Безу. Вашему ребёнку пока рано её знать, но разве не здорово, что даже маленький ребёнок может играть с идеями из серьёзной математики?

Гири с удвоением: что будет, если у вас есть по одной гире каждого веса из последовательности удвоения — 1, 2, 4, 8 и 16? Сколько существует способов, чтобы взвесить предмет весом 13? Какой максимальный вес можно измерить с таким набором?

После небольшого исследования вы увидите, что можно взвесить все предметы вплоть до того, которое на единицу меньше удвоенного максимального веса — в нашем случае это 31. При этом каждый вес можно измерить только одним способом — например, $13 = 1 + 4 + 8$, и другого варианта нет. Довольно интересно! Эта ситуация связана с двоичной системой счисления.

Гири по числам Фибоначчи: что произойдет, если гири будут иметь веса, соответствующие числам Фибоначчи? Будет ли несколько способов взвесить один и тот же предмет? Попробуйте найти ограничение, которое сделает так, чтобы для каждого веса был только один способ взвешивания.

Допустим, у вас есть гири весом 1, 1, 2, 3, 5, 8 и 13 по одной каждой; тогда одно и то же число, например 10, можно получить разными способами ($2+3+5$, $2+8$, $1+1+3+5$, $1+1+8$), потому что числа

Фибоначчи можно представлять через соседние элементы (например, $2 = 1+1$, $8 = 5+3$); чтобы избежать таких повторений, вводят правило — нельзя использовать сразу два соседних числа из последовательности, и тогда для 10 остаётся только один вариант — $2+8$.